

Векторы в пространстве и метод координат. Задача С2

Существует два способа решения задач по стереометрии.

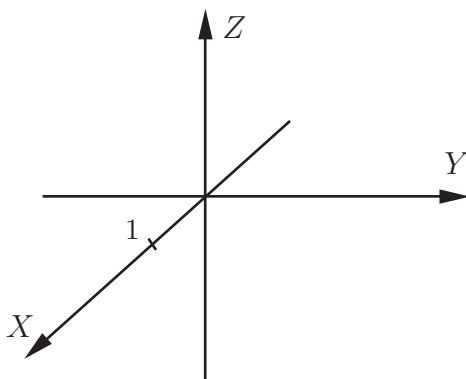
Первый — классический — требует отличного знания аксиом и теорем стереометрии, логики, умения построить чертеж и свести объемную задачу к планиметрической. Способ хорош тем, что развивает мозги и пространственное воображение.

Другой метод — применение векторов и координат. Это простые формулы, алгоритмы и правила. Он очень удобен, особенно когда времени до экзамена мало, а решить С2 хочется.

Если вы освоили [векторы на плоскости и действия с ними](#) — то и с векторами в пространстве разберетесь. Многие понятия окажутся знакомыми.

Система координат в пространстве

Выберем начало координат. Проведем три взаимно перпендикулярные оси X , Y и Z . Зададим удобный масштаб.

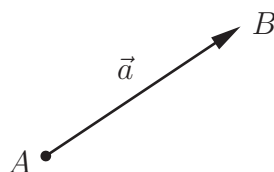


Получилась **система координат** в трехмерном пространстве. Теперь каждая его точка характеризуется тремя числами — координатами по X , Y и Z . Например, запись $M(-1; 3; 2)$ означает, что координата точки M по X (абсцисса) равна -1 , координата по Y (ордината) равна 3 , а координата по Z (апшиката) равна 2 .

Векторы в пространстве определяются так же, как и на плоскости. Это направленные отрезки, имеющие начало и конец. Только в пространстве вектор задается тремя координатами x , y и z :

$$\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$$

Как найти координаты вектора? Как и на плоскости — из координаты конца вычитаем координату начала.



$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

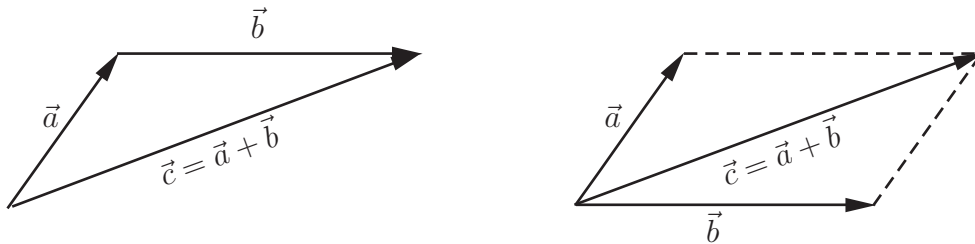
Длина вектора \overrightarrow{AB} в пространстве — это расстояние между точками A и B . Находится как корень квадратный из суммы квадратов координат вектора.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Пусть точка M — середина отрезка AB . Ее координаты находятся по формуле:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Для сложения векторов применяем уже знакомые правило треугольника и правило параллелограмма.



Сумма векторов, их разность, произведение вектора на число и скалярное произведение векторов определяются так же, как и на плоскости. Только координат не две, а три. Возьмем векторы $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$.

Сумма векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$$

Разность векторов:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(x_a - x_b; y_a - y_b; z_a - z_b)$$

Произведение вектора на число:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{p}(\lambda x_a; \lambda y_a; \lambda z_a)$$

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b$$

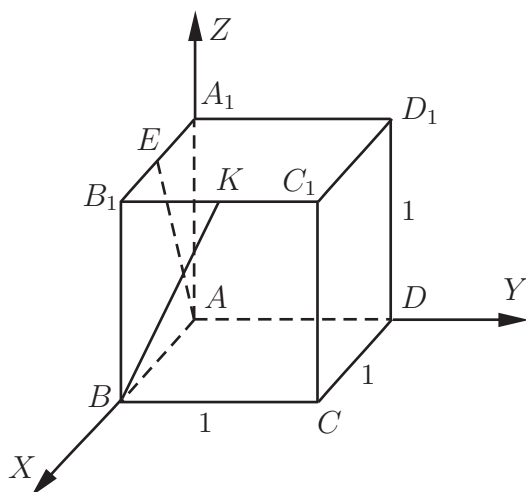
Косинус угла между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

Последняя формула удобна для нахождения угла между прямыми в пространстве. Особенно если эти прямые — скрещиваются. Напомним, что так называются прямые, которые не параллельны и не пересекаются. Они лежат в параллельных плоскостях.

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E и K — середины ребер соответственно $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK .

Если в задаче С2 вам достался куб — значит, повезло. Он отлично вписывается в прямоугольную систему координат. Строим чертеж:



Длина ребра куба не дана. Какой бы она ни была, угол между AE и BK от нее не зависит. Поэтому возьмем единичный куб, все ребра которого равны 1.

Прямые AE и BK — скрещиваются. Найдем угол между векторами \overrightarrow{AE} и \overrightarrow{BK} . Для этого нужны их координаты.

$$\begin{aligned} A & (0; 0; 0) \\ B & (1; 0; 0) \\ E & \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \\ K & \left(1; \frac{1}{2}; 1\right) \end{aligned}$$

Запишем координаты векторов:

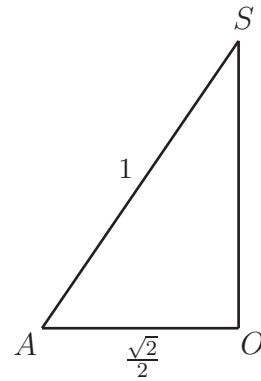
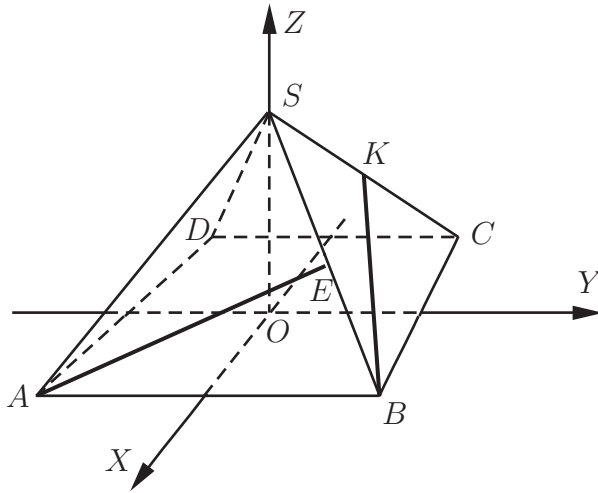
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} & \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \\ \overrightarrow{BK} & \left(0; \frac{1}{2}; 1\right) \end{aligned}$$

и найдем косинус угла между векторами \overrightarrow{AE} и \overrightarrow{BK} :

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BK}}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{BK}|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E , K — середины ребер SB и SC соответственно. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK .

Лучше всего выбрать начало координат в центре основания пирамиды, а оси X и Y сделать параллельными сторонам основания.



Координаты точек A , B и C найти легко:

$$A \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0 \right)$$

$$B \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right)$$

$$C \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right)$$

Из прямоугольного треугольника AOS найдем $OS = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Координаты вершины пирамиды: $S(0; 0; \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Точка E — середина SB , а K — середина SC . Воспользуемся формулой для координат середины отрезка и найдем координаты точек E и K .

$$E \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$K \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

Найдем координаты векторов \overrightarrow{AE} и \overrightarrow{BK} :

$$\overrightarrow{AE} \left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$\overrightarrow{BK} \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

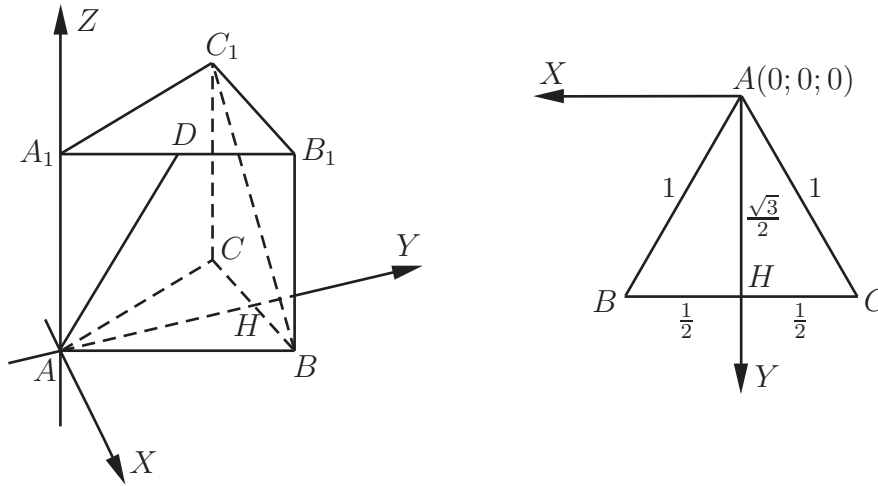
и угол между ними:

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BK}}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{BK}|} = \frac{1}{6}$$

Покажем теперь, как вписать систему координат в треугольную призму:

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра A_1B_1 . Найдите косинус угла между прямыми AD и BC_1 .

Пусть точка A — начало координат. Возьмем ось X параллельно стороне BC , а ось Y перпендикулярно ей. Другими словами, на оси Y будет лежать отрезок AH , являющийся высотой треугольника ABC . Нарисуем отдельно нижнее основание призмы.



Запишем координаты точек:

$$\begin{aligned}
 A & (0; 0; 0) \\
 A_1 & (0; 0; 1) \\
 B & \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right) \\
 B_1 & \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right) \\
 C_1 & \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)
 \end{aligned}$$

Точка D — середина A_1B_1 . Значит, пользуемся формулами для координат середины отрезка.

$$D \left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right)$$

Найдем координаты векторов \overrightarrow{AD} и $\overrightarrow{BC_1}$, а затем угол между ними:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AD} & \left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right) \\
 \overrightarrow{BC_1} & \left(-1; 0; 1\right)
 \end{aligned}$$

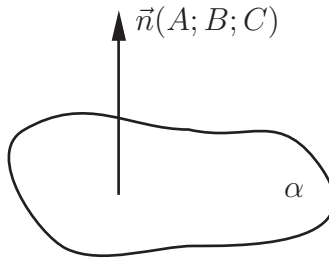
$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

Смотрите, как легко с помощью векторов и координат найти угол между прямыми. А если требуется найти угол между плоскостями или между прямой и плоскостью? Для решения подобных задач нам понадобится уравнение плоскости в пространстве.

Плоскость в пространстве задается уравнением:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Здесь числа A , B и C — координаты вектора, перпендикулярного этой плоскости. Его называют нормалью к плоскости.



Вместо x , y и z можно подставить в уравнение координаты любой точки, принадлежащей данной плоскости. Получится верное равенство.

Плоскость в пространстве можно провести через любые три точки, не лежащие на одной прямой. Поэтому для того, чтобы написать уравнение плоскости, берем координаты трех принадлежащих ей точек. Подставляем их по очереди в уравнение плоскости. Решаем полученную систему.

Покажем, как это делается.

Напишем уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1; 0; 1)$, $N(2; -2; 0)$ и $K(4; 1; 2)$.

Уравнение плоскости выглядит так:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Подставим в него по очереди координаты точек M , N и K .

Для точки M :

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D = 0.$$

То есть $A + C + D = 0$.

Для точки N :

$$A \cdot 2 + B \cdot (-2) + C \cdot 0 + D = 0;$$

$$2A - 2B + D = 0.$$

Аналогично для точки K :

$$4A + B + 2C + D = 0.$$

Получили систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ 2A - 2B + D = 0 \\ 4A + B + 2C + D = 0 \end{cases}$$

В ней четыре неизвестных: A , B , C и D . Поэтому одну из них мы выберем сами, а другие выразим через нее. Правило простое — вместо одной из переменных можно взять любое число, не равное нулю.

Пусть, например, $D = -2$. Тогда:

$$\begin{cases} A + C - 2 = 0 \\ 2A - 2B - 2 = 0 \\ 4A + B + 2C - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ A - B = 1 \\ 4A + B + 2C = 2 \end{cases}$$

Выразим C и B через A и подставим в третье уравнение:

$$\begin{cases} C = 2 - A \\ B = A - 1 \\ 4A + A - 1 + 4 - 2A = 2 \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{3} \\ B &= -\frac{4}{3} \\ C &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Уравнение плоскости MNK имеет вид:

$$-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{7}{3}z - 2 = 0.$$

Умножим обе части уравнения на -3 . Тогда коэффициенты станут целыми:

$$x + 4y - 7z + 6 = 0.$$

Вектор $\vec{n}(1; 4; -7)$ — это нормаль к плоскости MNK .

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

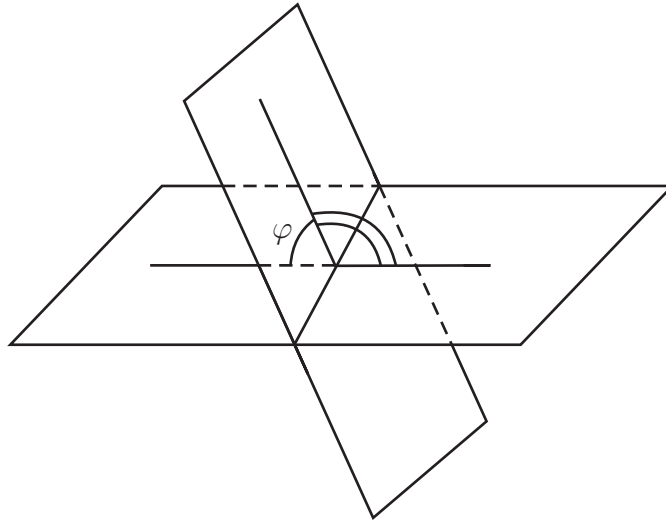
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Угол между плоскостями равен углу между нормальными к этим плоскостям:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Не правда ли, знакомая формула? Скалярное произведение нормалей поделили на произведение их длин.

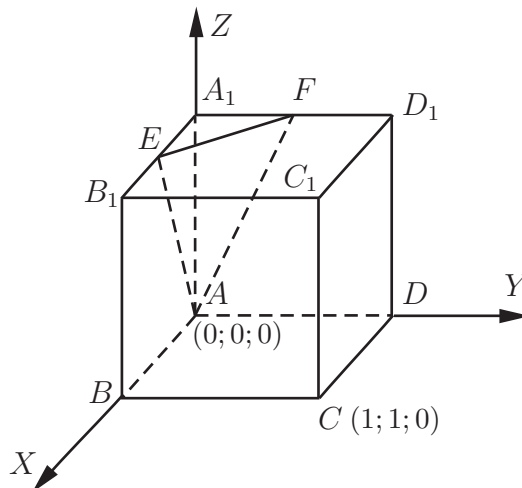
Заметим, что при пересечении двух плоскостей вообще-то образуется четыре угла.



Мы берем меньший из них. Поэтому в формуле стоит модуль скалярного произведения — чтобы косинус угла был неотрицателен.

4. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E и F — середины ребер соответственно $A_1 B_1$ и $A_1 D_1$. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BDD_1 .

Строим чертеж. Видно, что плоскости AEF и BDD_1 пересекаются где-то вне куба. В классическом решении пришлось бы строить линию их пересечения. Но векторно-координатный метод значительно всё упрощает. Не будем ломать голову над тем, по какой прямой пересекаются плоскости. Просто отметим координаты нужных нам точек и найдем угол между нормальными к плоскостям AEF и BDD_1 .



Сначала — нормаль к плоскости BDD_1 . Конечно, мы можем подставить координаты точек B , D и D_1 в уравнение плоскости и найти коэффициенты, которые и будут координатами вектора нормали. А можем сделать хитрее — увидеть нужную нормаль прямо на чертеже. Ведь плоскость BDD_1 — это диагональное сечение куба. Вектор \vec{AC} перпендикулярен этой плоскости.

Итак, первый вектор нормали у нас уже есть: $\vec{n}_1 = \vec{AC}(1; 1; 0)$.

Напишем уравнение плоскости AEF .

$$\begin{aligned} A & (0; 0; 0) \\ E & \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \\ F & \left(0; \frac{1}{2}; 1\right) \end{aligned}$$

Берем уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и по очереди подставляем в него, вместо x , y и z , соответствующие координаты точек A , E и F .

$$\begin{array}{l|l} A & 0 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C + D = 0 \\ E & \frac{1}{2} \cdot A + 0 \cdot B + 1 \cdot C + D = 0 \\ F & 0 \cdot A + \frac{1}{2} \cdot B + 1 \cdot C + D = 0 \end{array}$$

Упростим систему:

$$\begin{cases} D = 0 \\ \frac{1}{2}A + C = 0 \\ \frac{1}{2}B + C = 0 \end{cases}$$

Пусть $C = -1$. Тогда $A = B = 2$.

Уравнение плоскости AEF : $2x + 2y - z = 0$.

Нормаль к плоскости AEF : $\vec{n}(2; 2; -1)$.

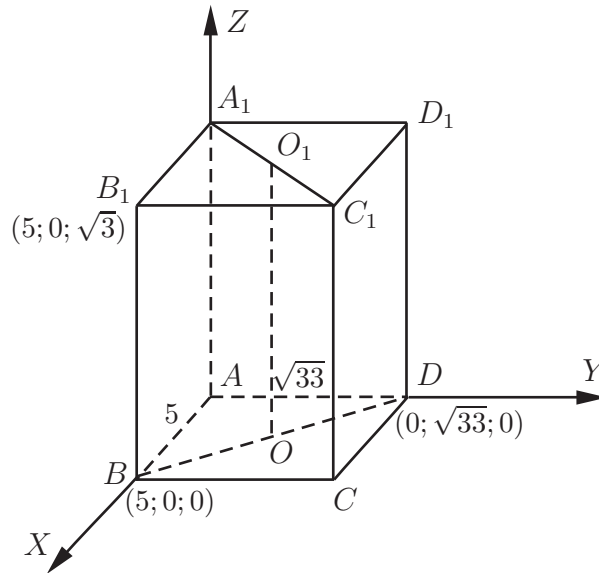
Найдем угол между плоскостями:

$$\cos \varphi = \frac{|2 + 2|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}} = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

5. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани $AA_1 D_1 D$ и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой $B_1 D$, если расстояние между прямыми $A_1 C_1$ и BD равно $\sqrt{3}$.

Эта задача наглядно показывает, насколько векторный метод проще классического. Попробуйте, для разнообразия, построить необходимые сечения и провести все доказательства — как это делается в «классике» :-)

Строим чертеж. Прямую четырехугольную призму можно по-другому назвать «параллелепипед».



Замечаем, что длина и ширина параллелепипеда у нас есть, а вот высота — вроде не дана. Как же ее найти?

«Расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$ ». Прямые A_1C_1 и BD скрещиваются. Одна из них — диагональ верхнего основания, другая — диагональ нижнего. Вспомним, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра. Общий перпендикуляр к A_1C_1 и BD — это, очевидно, OO_1 , где O — точка пересечения диагоналей нижнего основания, O_1 — точка пересечения диагоналей верхнего. А отрезок OO_1 и равен высоте параллелепипеда.

Итак, $AA_1 = \sqrt{3}$.

Плоскость AA_1D_1D — это задняя грань призмы на нашем чертеже. Нормаль к ней — это любой вектор, перпендикулярный задней грани, например, вектор \overrightarrow{AB} $(5; 0; 0)$ или, еще проще, вектор $\vec{n}_1(1; 0; 0)$.

Осталась еще «плоскость, проходящая через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D ». Но позвольте, если плоскость перпендикулярна прямой B_1D — значит, B_1D и есть нормаль к этой плоскости! Координаты точек B_1 и D известны:

$$B_1 (5; 0; \sqrt{3})$$

$$D (0; \sqrt{33}; 0)$$

Координаты вектора $\overrightarrow{B_1D}$ — тоже:

$$\overrightarrow{B_1D} (-5; \sqrt{33}; -\sqrt{3}) = \vec{n}_2$$

Находим угол между плоскостями, равный углу между нормальными к ним:

$$\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{25 + 33 + 3}} = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

Зная косинус угла, находим его тангенс по формуле

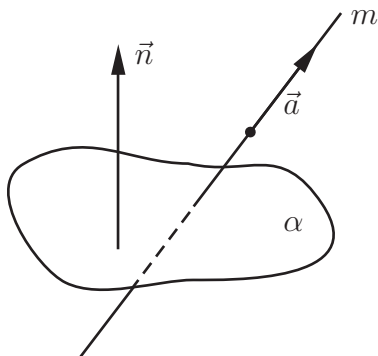
$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

Получим: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\frac{6}{5}$.

Угол между прямой m и плоскостью α тоже вычисляется с помощью скалярного произведения векторов.

Пусть \vec{a} — вектор, лежащий на прямой m (или параллельный ей), \vec{n} — нормаль к плоскости α .

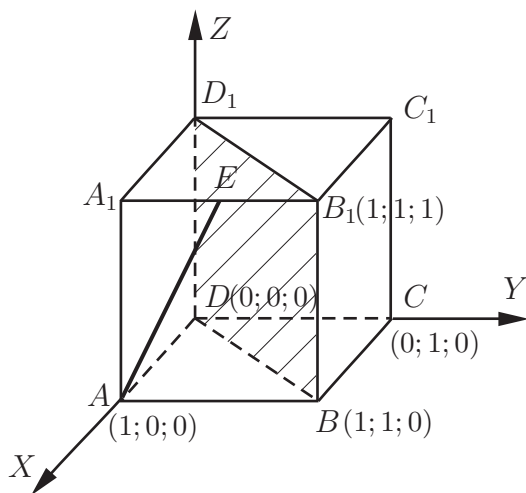


Находим синус угла между прямой m и плоскостью α по формуле:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}$$

6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка E — середина ребра $A_1 B_1$. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD_1 .

Как всегда, рисуем чертеж и выбираем систему координат.



$A(1; 0; 0)$

$E(1; \frac{1}{2}; 1)$

Находим координаты вектора $\overrightarrow{AE}(0; \frac{1}{2}; 1)$.

Нужно ли нам уравнение плоскости BDD_1 ? В общем-то, без него можно обойтись. Ведь эта плоскость является диагональным сечением куба, а значит, нормалью к ней будет любой вектор, ей перпендикулярный. Например, вектор $\overrightarrow{AC}(1; -1; 0)$.

Найдем угол между прямой и плоскостью:

$$\sin \varphi = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AE}|} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

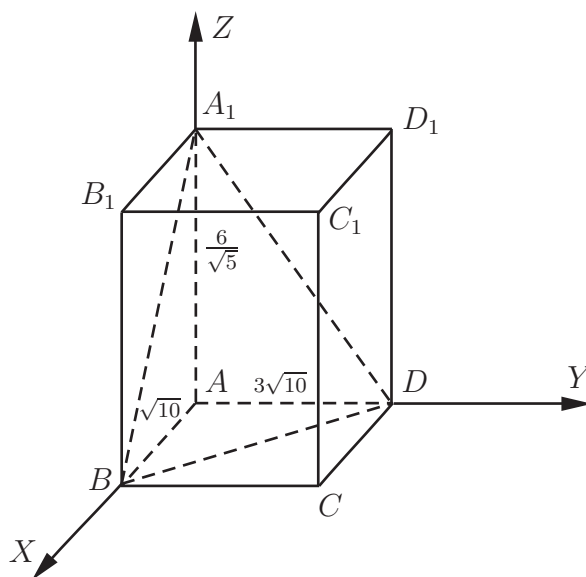
Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Расстояние от точки M с координатами x_0 , y_0 и z_0 до плоскости α , заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, можно найти по формуле:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

7. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{10}$, $AD = 3\sqrt{10}$. Высота параллелепипеда $AA_1 = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости $A_1 DB$.

Построим чертёж и выпишем координаты точек:



$A(0; 0; 0)$

$A_1(0; 0; \frac{6}{\sqrt{5}})$

$B(\sqrt{10}; 0; 0)$

$D(0; 3\sqrt{10}; 0)$

Запишем уравнение плоскости $A_1 DB$. Вы помните, как это делается — по очереди подставляем координаты точек A_1 , D и B в уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{array}{l|l} A_1 & \frac{6}{\sqrt{5}}C + D = 0 \\ B & \sqrt{10}A + D = 0 \\ D & 3\sqrt{10}B + D = 0 \end{array}$$

Решим эту систему. Выберем $D = -6\sqrt{10}$.
Тогда $C = 5\sqrt{2}$, $A = 6$, $B = 2$.

Уравнение плоскости A_1DB имеет вид:

$$6x + 2y + 5\sqrt{2}z - 6\sqrt{10} = 0.$$

Дальше все просто. Находим расстояние от точки A до плоскости A_1DB :

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{50 + 36 + 4}} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{90}} = 2.$$

В некоторых задачах С2 требуется найти расстояние от прямой до параллельной ей плоскости. В этом случае можно выбрать любую точку, принадлежащую данной прямой.